ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΣΥΝΕΧΩΝ ΜΕΣΩΝ
ΛΥΣΕΙΣ
11 Φεβρουαρίου 2013

---

1) Δίνεται το πεδίο ταχυτήτων

$$u_x = x^2y + y^3, \quad u_y = -x^3 - xy^2, \quad u_z = 0.$$

α) (1,5 μονάδες) Να δείξετε ότι οι γραμμές ροής είναι κυκλικές.
β) (1 μονάδα) Χωρίς να υπολογίσετε τις εξισώσεις των τροχιών, να δικαιολογήστε αν αυτές ταυτίζονται ή όχι με τις εξισώσεις των γραμμών ροής.

Λύση: α) Για να βρούμε την εξίσωση των γραμμών ροής έχουμε:

$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} = \frac{dz}{u_z} = d\lambda.$$

Από την τελευταία εξίσωση βρίσκουμε $\dfrac{dz}{u_z} = d\lambda \Rightarrow dz = u_z d\lambda = 0 \Rightarrow z = \xi^3 = \text{σταθερά}$.
Επίσης έχουμε $\dfrac{dx}{x^2y+y^3} = \dfrac{dy}{-x^3-xy^2} \Rightarrow -x^3dx - xy^2dx = x^2ydy + y^3dy \Rightarrow x^2(xdx+ydy) + y^2(xdx+ydy) = 0 \Rightarrow (x^2+y^2)(xdx+ydy) = 0 \Rightarrow (x^2+y^2)\, d\left[\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right] = 0 \Rightarrow d\left[(x^2+y^2)^2\right] = 0 \Rightarrow (x^2+y^2)^2 = c = \text{σταθερά}$. Η σταθερά c καθορίζεται από τις αρχικές συνθήκες και ισούται με $c = [(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2]^2$. Επομένως έχουμε τη σχέση η $x^2+y^2 = \sqrt{c}$ οποία περιγράφει κύκλο ακτίνας $\sqrt{(\xi^1)^2+(\xi^2)^2}$.

β) Οι εξισώσεις των γραμμών ροής συμπίπτουν με τις εξισώσεις των τροχιών γιατί ο χρόνος t δεν εμφανίζεται ρητά στην έκφραση της ταχύτητας.

2) Δίνεται το πεδίο ταχυτήτων

$$u_x = 2az, \quad u_y = 0, \quad u_z = 3bx,$$

όπου a, b πραγματικές σταθερές.
α) (1 μονάδα) Να εξετάσετε αν αυτό το πεδίο προέρχεται από δυναμικό και να βρείτε το διάνυσμα στροβιλισμού $\vec{\omega}$.
β) (1 μονάδα) Να βρεθούν οι εξισώσεις των γραμμών ροής.
γ) (0,5 μονάδες) Πως διαμορφώνονται οι απαντήσεις στα ερωτήματα (α) και (β) αν ισχύει $b = \frac{2a}{3}$;

Λύση: α) Επειδή $\mathrm{rot}\vec{u} = \nabla\times\vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2az & 0 & 3bx \end{vmatrix} = (2a-3b)\vec{e_2} \neq \vec{0}$ (αν $2a-3b \neq 0$) το πεδίο δεν προέρχεται από δυναμικό. Το διάνυσμα στροβιλισμού είναι $\vec{\omega} = \frac{1}{2}\mathrm{rot}\vec{u} = (a-\frac{3}{2}b)\vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ a-\frac{3}{2}b \\ 0 \end{pmatrix}$.

β) Για να βρούμε την εξίσωση των γραμμών ροής έχουμε:

$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} = \frac{dz}{u_z} = d\lambda.$$

Εύκολα βρίσκουμε $\frac{dy}{u_y} = d\lambda \Rightarrow dy = u_y d\lambda = 0 \Rightarrow y = \xi^2 =$ σταθερά.
Επίσης έχουμε $\frac{dx}{2az} = \frac{dz}{3bx} \Rightarrow 2azdz = 3bxdz \Rightarrow 2a\int zdz = 3b\int xdx \Rightarrow az^2 = \frac{3bx^2}{2} + c$. Η σταθερά c καθορίζεται από τις αρχικές συνθήκες και ισούται με $c = a(\xi^3)^2 - \frac{3b}{2}(\xi^1)^2$.
Επομένως οι γραμμές ροής περιγράφονται από τις σχέσεις:

$$z^2 = \frac{3b}{2a}x^2 + (\xi^3)^2 - \frac{3b}{2a}(\xi^1)^2, \quad y = \xi^2.$$

γ) Αν $b = \frac{2a}{3}$ τότε $\mathrm{rot}\vec{u} = \nabla \times \vec{u} = 0$ και το πεδίο προέρχεται από δυναμικό. Επίσης $\vec{\omega} = \vec{0}$. Για τις εξισώσεις των γραμμών ροής παίρνουμε

$$z^2 = x^2 + (\xi^3)^2 - (\xi^1)^2, \quad y = \xi^2.$$

3) Η παραμόρφωση συνεχούς μέσου δίνεται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 + b(x_2^2 + x_1) \\ x'_2 &= x_2 + b(x_3^2 + x_2) \\ x'_3 &= x_3 + b(x_1^2 + x_3) \end{aligned}$$

όπου $0 < b \ll 1$.
α) (1 μονάδα) Να εξεταστεί αν η παραμόρφωση είναι απειροστή ή πεπερασμένη και να βρεθεί ο τανυστής παραμόρφωσης.
β) (1,5 μονάδες) Να βρεθεί ο συντελεστής σχετικής επιμήκυνσης στο σημείο $A(0,1,0)$ κατά τη διεύθυνση που ορίζει το διάνυσμα $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Λύση: α) Τα διανύσματα μετατόπισης δίνονται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} w_1 &= x'_1 - x_1 = b(x_2^2 + x_1) = bw'_1 \\ w_2 &= x'_2 - x_2 = b(x_3^2 + x_2) = bw'_2 \\ w_3 &= x'_3 - x_3 = b(x_1^2 + x_3) = bw'_3 \end{aligned}$$

Μια παραμόρφωση είναι απειροστή όταν $\frac{\partial w_i}{\partial x_j} \ll 1$. Από τις παραπάνω σχέσεις βλέπουμε ότι $\frac{\partial w_i}{\partial x_j} = b\frac{\partial w'_i}{\partial x_j} = bk \ll 1$ διότι $k = \frac{\partial w'_i}{\partial x_j}$ είναι πεπερασμένος αριθμός. Επομένως η παραμόρφωση είναι απειροστή.

Στην περίπτωση απειροστής παραμόρφωσης τα στοιχεία του τανυστή παραμόρφωσης δίνονται από τις σχέσεις $\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i}\right]$. Οπότε ο τανυστής παραμόρφωσης είναι:

$$(\epsilon_{ij})_{(x_1,x_2,x_3)} = \begin{pmatrix} b & bx_2 & bx_1 \\ bx_2 & b & bx_3 \\ bx_1 & bx_3 & b \end{pmatrix} \tag{1}$$

β) Ο τανυστής παραμόρφωσης για το σημείο $A(0,1,0)$ είναι

$$(\epsilon_{ij})_A = \begin{pmatrix} b & b & 0 \\ b & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Ο συντελεστής σχετικής επιμήκυνσης για το σημείο $A(0,1,0)$ είναι $l_{\vec{a}} = \vec{a}^T E_A \vec{a}$, όπου $\vec{a}^T$ ο ανάστροφος πίνακας του μοναδιαίου διανύσματος $\vec{a}$ κατά τη διεύθυνση του $\vec{n}$. Έχουμε δηλαδή $\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, οπότε $l_{\vec{a}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)\begin{pmatrix} b & b & 0 \\ b & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1,0,-1)\begin{pmatrix} b \\ b \\ -b \end{pmatrix} = b.$

4) Η κατάσταση τάσης σε συνεχές μέσο καθορίζεται από τον τανυστή τάσης:

$$p_{11} = x_1^2, \quad p_{22} = x_2^2, \quad p_{33} = 0, \quad p_{12} = \frac{x_3}{2}, \quad p_{13} = p_{23} = 1.$$

α) (1,5 μονάδες) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M του χώρου με την ακόλουθη ιδιότητα: Για κάθε τέτοιο σημείο M υπάρχει κατάλληλη διεύθυνση $\vec{n}$ ώστε το διάνυσμα τάσης $\vec{p}_{\vec{n}}(M)$ ως προς αυτή τη διεύθυνση να μηδενίζεται.
β) (1 μονάδα) Να βρεθεί η διεύθυνση κατά την οποία μηδενίζεται η τάση στο σημείο $(1,2,5)$.

Λύση: α) Η γενική μορφή του τανυστή τάσης είναι

$$(T_{ij}) = \begin{pmatrix} x_1^2 & \frac{1}{2}x_3 & 1 \\ \frac{1}{2}x_3 & x_2^2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Για το μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ που καθορίζει τη διεύθυνση όπου μηδενίζεται η τάση θα ισχύει

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1, \tag{3}$$

και

$$T\vec{n} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1^2 & \frac{1}{2}x_3 & 1 \\ \frac{1}{2}x_3 & x_2^2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left(x_1^2\right) n_1 + \left(\frac{1}{2}x_3\right) n_2 + n_3 = 0, \;\; \left(\frac{1}{2}x_3\right) n_1 + \left(x_2^2\right) n_2 + n_3 = 0, \;\; n_1 + n_2 = 0. \tag{4}$$

Η τελευταία σχέση της (4) μας δίνει

$$n_2 = -n_1, \tag{5}$$

και η πρώτη

$$n_3 = \left(\frac{1}{2}x_3 - x_1^2\right) n_1, \tag{6}$$

οπότε τελικά παίρνουμε

$$\left(x_1^2 + x_2^2 - x_3\right) n_1 = 0. \tag{7}$$

Επειδή $n_1 \neq 0$, (αφού σε διαφορετική περίπτωση δεν θα επαληθευόταν η (3)) έχουμε

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3 = 0, \tag{8}$$

όπου είναι η εξίσωση του ζητούμενου γεωμετρικού τόπου.

β) Το σημείο $(1, 2, 5)$ ανήκει στον γεωμετρικό τόπο αφού ικανοποιεί την εξίσωση (8). Επομένως από τις (5), (6) και (3) βρίσκουμε ότι

$$\vec{n} = \left(\frac{2}{\sqrt{17}}, -\frac{2}{\sqrt{17}}, \frac{3}{\sqrt{17}}\right). \tag{9}$$